Aufgabe 1 *(Drehwinkel und Drehachse)*
Zeigen Sie für $Q \in \mathbb{S}O(3)$ mit Drehwinkel $\theta \in [0, 2\pi)$:

(1) $\cos\theta = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} Q - 1)$ wobei $\operatorname{tr} Q = Q_{11} + Q_{22} + Q_{33}$.

(2) Ist $v \in \mathbb{R}^3$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$, so gilt $(Q^{\mathrm{T}} - Q)v = 0$.

(3) Ist $\cos\theta \neq \pm 1$, so hat die Matrix $Q^{\mathrm{T}} - Q$ den Rang zwei.

(4) Ist $\cos\theta \neq \pm 1$, so ist folgender Vektor Eigenvektor zu $\lambda = 1$ (*Drehachse*):

$$v = \begin{pmatrix} Q_{23} - Q_{32} \\ Q_{31} - Q_{13} \\ Q_{12} - Q_{21} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 *(quadratische Ergänzung)*
Eine quadratische Funktion auf $\mathbb{R}^n$ hat die allgemeine Form $q(y) = \langle Ay, y\rangle + \langle b, y\rangle + c$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$. Finden Sie, für A invertierbar, eine Substitution $y = x - x_0$, so dass gilt:

$$q(x - x_0) = \langle Ax, x\rangle + \tilde{c} \quad \text{mit } \tilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3 *(Diagonalisierung)*
Diagonalisieren Sie die quadratische Form $q(x_1, x_2) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2$ und zeichnen Sie ein Höhenlinienbild.

Aufgabe 4 *(eingespannte schwingende Saite)*
Für $k \in \mathbb{N}$ sei $u_k : [0, L] \to \mathbb{R}$, $u_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{L}$, und V sei der Raum aller endlichen Linearkombinationen der u_k. Auf V haben wir

$$\langle u, v\rangle = \int_0^L u(x)v(x)\,dx \quad \text{und} \quad \|u\|^2 = \int_0^L u(x)^2\,dx.$$

Zeigen Sie:

(1) Für $u \in V$ gilt $u(0) = u(L) = 0$.

(2) Mit $Au = -u''$ gilt $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$ für $u, v \in V$ (*partielle Integration*).

(3) Die Funktionen u_k sind Eigenfunktionen von A, genauer gilt

$$Au_k = \lambda_k u_k \quad \text{mit } \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2.$$

(4) Für $u \in V$ mit $\|u\| = 1$ und $u \perp u_1, \ldots, u_{k-1}$ gilt

$$\lambda_k = \min\{\langle Au, u\rangle : \|u\| = 1,\, u \perp u_1, \ldots, u_{k-1}\}.$$

Anmerkung. Die Wellenlängen sind $\frac{2L}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_k}}$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 3.6.2013, vor der Vorlesung.